

Stichting
MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
Amsterdam

TW 14

Over een reeks van Schlömilch

J. Kemperman

mei 1951

MATHEMATISCH CENTRUM

Afd. Toegepaste Wiskunde.

Rapport TW no. 14.

Datum: Mei 1951.

Auteur: J. Kemperman.

Titel: Over een reeks van Schlömilch.

Over een reeks van Schlömilch.

Inleiding.

Gevraagd werd de reeksen

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(mx)}{m} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

en

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(mx) J_{2n}(my)}{m} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

te sommeren voor $0 < |x| \leq 2\pi$ resp. $0 < |x| + |y| \leq 2\pi$. Hierin is $J_n(z)$ de Besselfunctie van orde n .

In dit rapport zullen we de reeksen

$$(1) \quad A_{n,k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(mx)}{m^k}$$

en

$$(2) \quad B_{n,\nu,k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(mx) J_{\nu}(my)}{m^k}$$

expliciet sommeren tot een eenvoudige functie (in x resp. x en y) onder volgende onderstellingen.

- a) x en y zijn positieve reële getallen.
- b) $n \geq 0, \nu \geq 0$ en $k \geq 1$ zijn gehele getallen.
- c) In (1) is $k+n$ even; in (2) is $k+n+\nu$ even.

Wegens

$$A_{n,k} = \left[B_{n,0,k} \right]_{y=0}$$

zou het eigenlijk voldoende zijn ons te beperken tot de berekening van $B_{n,\nu,k}$. Evenwel is verhoudingsgewijs de berekening van $A_{n,k}$ veel eenvoudiger en daarom hebben we deze in een aparte paragraaf vooraf laten gaan.

Wat betreft de resultaten:

I. $A_{n,k}$ wordt gegeven door formule (6) of (7). Hierin is $\{x\} = x - 2\pi \left[\frac{x}{2\pi} \right]$ en is $\left[\xi + 2\pi B \right]^h$ een symbolische schrijfwijze van de som

$$\sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \xi^{h-j} (2\pi)^j B_j,$$

waarin B_j het j -de getal van Bernoulli voorstelt.

Ter illustratie: voor $0 < x \leq 2\pi$ geldt

$$A_{2n+1,1} = \frac{1}{2n+1} \quad \text{als } n \geq 1$$

$$= 1 - \frac{1}{4} x \quad \text{als } n = 0.$$

Verder geldt voor $2\pi \leq x \leq 4\pi$ en $n \geq 1$

$$A_{2n+1,1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{2(-1)^n}{2n+1} \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{x^2}} Q_{2n}\left(\frac{2\pi}{x}\right)$$

waarin

$$Q_{2n}(\xi) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left[(2n+1) \arcsin \xi \right]$$

het $2n$ -de polynoom van Tschebyscheff (van de tweede soort) voorstelt. Tenslotte

$$A_{1,1} = 1 - \frac{1}{4} x + 2 \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{x^2}}$$

voor $2\pi \leq x \leq 4\pi$.

II. Aangegeven wordt hoe men $B_{n,y,k}$ kan berekenen. Alleen voor het bijzondere geval $k = 1$ is deze berekening geheel uitgewerkt.

In het geval $0 \leq y \leq x$ met $0 < x + y \leq 2\pi$ wordt $B_{2n+1,2y,1}$ gevonden door combinatie van de formules (13), (15), (23) en (24).

In het geval $0 \leq x \leq y$ met $0 < x + y \leq 2\pi$ wordt $B_{2n+1,2y,1}$ gevonden door combinatie van de formules (13), (29) en (14), (30), (33) en (34).

Ter illustratie:

$$B_{1,0,1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(mx) J_0(my)}{m}$$

wordt voor $0 \leq y \leq x$ met $0 < x + y \leq 2\pi$ gegeven door

$$B_{1,0,1} = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{4} x,$$

en voor $0 \leq x \leq y$ met $0 < x + y < 2\pi$ door

$$B_{1,0,1} = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) K\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{4} x.$$

van de hierin voorkomende integralen

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

en

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx$$

staan tabellen ter beschikking (zie E. JAHNKE and F. EMDE, Tables of functions 1945, blz. 85).

De sommering van (1) en (2) berust op de bekende integraalformule

$$(3) \quad J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin\theta) d\theta,$$

geldig voor n geheel ≥ 0 . Verder maken we gebruik van de formules

$$(4) \quad V_{2k}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mx}{m^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \frac{1}{(2k)!} \left[\{x\} + 2\pi B \right]^{2k}$$

($k = 1, 2, 3, \dots$) en

$$(5) \quad V_{2k+1}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m^{2k+1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \frac{1}{(2k+1)!} \left[\{x\} + 2\pi B \right]^{2k+1}$$

($k = 0, 1, 2, \dots$); zie K. KNOPP, Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen, Leipzig 1931, blz. 541. Hierin is

$$\{x\} = x - 2 \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor,$$

dus gelijk aan de "afstand" van x tot het dichtstbijzijnde punt $2\pi h \leq x$ (h geheel). Verder moet in (4) en (5) de vorm $\left[\xi + 2\pi B \right]^h$ beschouwd worden als de symbolische schrijfwijze voor

$$\xi^h + \binom{h}{1} \xi^{h-1} 2\pi B_1 + \binom{h}{2} \xi^{h-2} 4\pi^2 B_2 + \dots + \binom{h}{h} (2\pi)^h B_h,$$

waarin B_j ($j = 1, 2, \dots$) de getallen van Bernoulli voorstellen. En wel is

$$B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \dots = 0$$

en

$$B_1 = -\frac{1}{2}; \quad B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_4 = -\frac{1}{30}; \quad B_6 = \frac{1}{42} \text{ enz.}$$

Opgemerkt moet nog worden, dat in het geval $k = 0$ formule (5) niet geldt, wanneer x een veelvoud is van 2π .

1. De sommering van $A_{n,k}$.

Uit (1) en (3) volgt

$$A_{n,k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - mx \sin\theta) d\theta.$$

In het geval $k \geq 2$ is verwisseling van sommatie en integratie toegestaan. We vinden

$$A_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos n\theta d\theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mx \sin\theta)}{m^k} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin n\theta d\theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mx \sin\theta)}{m^k}.$$

Als n even is, dan is hierin de tweede integraal nul. Daar in dit geval bovendien k even verondersteld werd, volgt wegens (4) voor $k \geq 1$

$$A_{2n,2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} V_{2k}(x \sin \theta) \cos 2n\theta d\theta.$$

Analoog met (5) voor $k \geq 1$

$$A_{2n+1,2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} V_{2k+1}(x \sin \theta) \sin (2n+1)\theta d\theta.$$

Een nauwkeurige analyse van de verwisseling van sommatie en integratie leert, dat dit ook geldt voor $k = 0$, mits $x \neq 0$.

Gebruik makend van het laatste lid van (4) en (5) vinden we tenslotte

$$(6) \quad A_{2n,2k}(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\pi} \frac{1}{(2k)!} \int_0^{\pi/2} \left[\{x \sin \theta\} + 2\pi B \right]^{2k} \cos 2n\theta d\theta$$

voor $k \geq 1$, en

$$(7) \quad A_{2n+1,2k+1}(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\pi} \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^{\pi/2} \left[\{x \sin \theta\} + 2\pi B \right]^{2k+1} \sin(2n+1)\theta d\theta$$

voor $k \geq 0$. Wegens

$$\int \sin^{2h}\theta \cos 2n\theta d\theta = \frac{(-1)^h}{2^{2h+1}} \sum_{i=0}^{2h} (-1)^i \binom{2h}{i} \frac{\sin(n+h-i)2\theta}{n+h-i}$$

en analoge formules, kan men uit (6) en (7) de gezochte functies $A_{2n,2k}$ en $A_{2n+1,2k+1}$ gemakkelijk berekenen. En wel is voor $0 < x \leq 2\pi$ deze functie een polynoom in x ten hoogste van de graad $2k$ resp. $2k+1$.

Ter illustratie beschouwen we de functie

$$A_{2n+1,1}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(mx)}{m}.$$

Deze wordt wegens (7) en $B_1 = -\frac{1}{2}$ gegeven door

$$A_{2n+1,1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\pi - \{x \sin \theta\} \right] \sin(2n+1)\theta d\theta,$$

geldig voor $x \neq 0$. Hieruit volgt voor $0 < x \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} A_{2n+1,1}(x) &= \frac{1}{2n+1} && \text{voor } n = 1, 2, 3, \dots \\ &= 1 - \frac{1}{4}x && \text{voor } n = 0 \end{aligned}$$

en verder voor $2\pi \leq x \leq 4\pi$

$$A_{2n+1,1}(x) = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \cos (2n+1) \Theta_0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(met $\Theta_0 = \arcsin \left(\frac{2\pi}{x} \right)$, $0 < \Theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$), en

$$A_{1,1}(x) = 1 - \frac{1}{4} x + 2 \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{x^2}}.$$

2. De sommering van $B_{n,\nu,k}$.

Uit (2) en (3) volgt

$$B_{n,\nu,k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \cos (n\theta - m x \sin \theta) d\theta \int_0^{\pi} \cos (\nu\varphi - m y \sin \varphi) d\varphi.$$

Voor $k \geq 2$ en voor $k = 1$ met $x \neq 0$ (of $y \neq 0$) is de verwisseling van sommatie en integratie toegestaan. We vinden

$$B_{n,\nu,k} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} \left[\cos n\theta \cos (mx \sin \theta) + \sin n\theta \sin (mx \sin \theta) \right] \left[\cos \nu\varphi \cos (my \sin \varphi) + \sin \nu\varphi \sin (my \sin \varphi) \right].$$

Als n en ν van dezelfde pariteit zijn (beide even of beide oneven) dan volgt hieruit

$$B_{n,\nu,k} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \cos n\theta d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \nu\varphi d\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos (mx \sin \theta) \cos (my \sin \varphi)}{m^k} + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \sin n\theta d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \nu\varphi d\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin (mx \sin \theta) \sin (my \sin \varphi)}{m^k}.$$

Zijn daarentegen n en ν van verschillende pariteit, dan hebben we

$$B_{n,\nu,k} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \cos n\theta d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \nu\varphi d\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos (mx \sin \theta) \sin (my \sin \varphi)}{m^k} + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \sin n\theta d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \nu\varphi d\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin (mx \sin \theta) \cos (my \sin \varphi)}{m^k}.$$

In verband met de gemaakte veronderstelling, dat $n + \nu + k$ even is, is in het eerste geval k even en in het tweede geval k oneven. We beperken ons verder tot het tweede geval (in het eerste geval verloopt de berekening geheel analoog).

Wegens

$$\sin \xi \cos \eta = \frac{1}{2} \sin (\xi + \eta) + \frac{1}{2} \sin (\xi - \eta)$$

en (5) vinden we, als n en ν van verschillende pariteit zijn,

$$(8) \quad B_{n,\nu,2k+1} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left[v_{2k+1}(x \sin \theta + y \sin \varphi) \sin (n\theta + \nu\varphi) + v_{2k+1}(x \sin \theta - y \sin \varphi) \sin (n\theta - \nu\varphi) \right] d\theta d\varphi.$$

Gebruik makend van het laatste lid van (5) vinden we nu $B_{n,\nu,2k+1}$ (n en ν van verschillende pariteit) als de som van een eindig aantal dubbelintegralen. Elk van deze dubbelintegralen kan elementair worden geïntegreerd.

Ter illustratie zullen we berekenen

$$B_{2n+1,2\nu,1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(mx) J_{2\nu}(my)}{m}.$$

Wegens

$$V_1(x) = \frac{1}{2} (\pi - \{x\})$$

volgt uit (8)

$$\begin{aligned} (9) \quad B_{2n+1,2\nu,1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\nu\varphi \, d\varphi \\ &- \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{x \sin\theta + y \sin\varphi\} \sin((2n+1)\theta + 2\nu\varphi) \, d\theta \, d\varphi \\ &- \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{x \sin\theta - y \sin\varphi\} \sin((2n+1)\theta - 2\nu\varphi) \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned}$$

We zullen aannemen, dat

$$(10) \quad x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad 0 < x + y \leq 2\pi.$$

Dan is voor $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ en $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\{x \sin\theta + y \sin\varphi\} - (x \sin\theta + y \sin\varphi) = 0$$

en verder

$$\{x \sin\theta - y \sin\varphi\} - (x \sin\theta - y \sin\varphi) = 0 \text{ of } 2\pi,$$

al naar gelang $x \sin\theta - y \sin\varphi$ positief of negatief is.

Wegens (9) vinden we dus

$$\begin{aligned} (11) \quad B_{2n+1,2\nu,1} &= \frac{1}{2n+1} \int_0^1 - \frac{2x}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\nu\varphi \, d\varphi \\ &- \frac{2y}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\nu\varphi \sin\varphi \, d\varphi - J. \end{aligned}$$

Hierin is $\delta_0 = 0$ of 1 , al naar gelang $\nu \geq 1$ of $= 0$.

Verder hebben we

$$(12) \quad J = \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{O}} \sin((2n+1)\theta - 2\nu\varphi) \, d\theta \, d\varphi,$$

waarin $\mathcal{O}$ het gedeelte van het vierkant $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ voorstelt, alwaar

$$x \sin\theta - y \sin\varphi < 0$$

geldt.

We kunnen (11) herleiden tot

$$(13) \quad B_{2n+1,2\nu,1} = \frac{1}{2n+1} \int_{\nu}^0 - \frac{1}{4} x \int_n^0 \int_{\nu}^0 - J \\ + (-1)^{n+\nu} \frac{y}{\pi^2} \frac{1}{2n+1} \frac{4\nu}{4\nu^2-1} .$$

Dus resteert nog slechts het probleem de integraal J te bepalen. En wel is J een functie van n, ν en y/x , welke nul is voor $y = 0$ (dan is $\mathcal{O}$ namelijk leeg), en welke voor $x = 0$ en $y > 0$ (dan vult $\mathcal{O}$ het hele vierkant op) gelijk is aan

$$(14) \quad \frac{1}{2n+1} = M_{n,0} \quad \text{of} \quad \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \frac{1-(-1)^{\nu}}{\nu} = M_{n,\nu}$$

al naar gelang $\nu = 0$ of $\nu \geq 1$.

Opm. We zullen gebruik maken van de polynomen van Tschebyscheff. Deze worden gedefinieerd door

$$T_n(\xi) = \cos(n \arccos \xi)$$

en

$$Q_{n-1}(\xi) = \frac{U_n(\xi)}{1-\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(n \arccos \xi).$$

Hiervoor geldt (zie E. MADELUNG, Die mathematische Hilfsmittel des Physikers, New York, 1943, blz. 55)

$$\cos(2n \arcsin \xi) = (-1)^n T_{2n}(\xi) ;$$

$$\cos((2n+1) \arcsin \xi) = (-1)^n U_{2n+1}(\xi) ;$$

$$\sin(2n \arcsin \xi) = (-1)^{n+1} U_{2n}(\xi) ;$$

$$\sin((2n+1) \arcsin \xi) = (-1)^n T_{2n+1}(\xi) .$$

Uit (12) volgt

$$(15) \quad J = \frac{2}{\pi} (J_1 - J_2)$$

met

$$(16) \quad J_1 = \int_{\mathcal{O}} \sin(2n+1)\theta \cos 2\nu\varphi \, d\theta \, d\varphi$$

en

$$(17) \quad J_2 = \int_{\mathcal{O}} \cos(2n+1)\theta \sin 2\nu\varphi \, d\theta \, d\varphi .$$

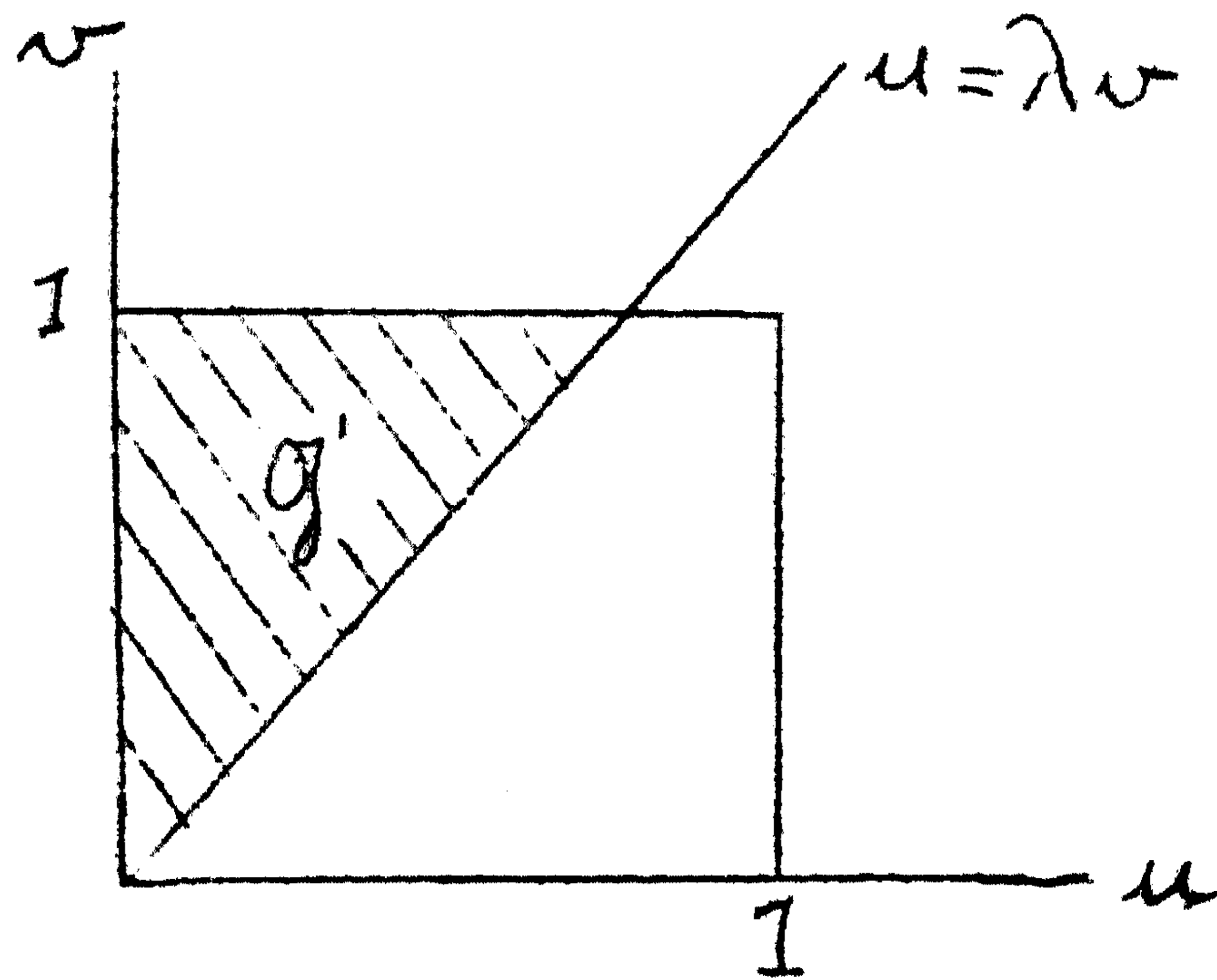
We beschouwen eerst het geval $x \geq y$ d.w.z. $\lambda \leq 1$, als

$$(18) \quad \lambda = \frac{y}{x} .$$

Door de transformatie

$$(19) \quad u = \sin \theta ; \quad v = \sin \varphi ,$$

gaat $\mathcal{G}$ over in het deel $\mathcal{G}'$ van het vierkant $\mathcal{H}'$ (met $0 \leq u \leq 1$ en $0 \leq v \leq 1$), alwaar $\frac{u}{v} < \lambda$ geldt.



Het ligt dus voor de hand om in (16) en (17) eerst de integratie naar θ , en pas daarna de integratie naar φ uit te voeren. Stellen we

$$(20) \quad \sin \theta_0 = \lambda \sin \varphi \quad (0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2})$$

dan vinden we uit (16)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\nu\varphi \, d\varphi \int_0^{\theta_0} \sin (2n+1)\theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\nu\varphi \, \frac{1 - \cos(2n+1)\theta_0}{2n+1} \, d\varphi , \end{aligned}$$

ofwel

$$(21) \quad \mathcal{J}_1 = \frac{1}{2n+1} \left[\frac{\theta_0}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\nu\varphi \cos (2n+1)\theta_0 \, d\varphi \right] .$$

Analoog volgt uit (17)

$$(22) \quad \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\nu\varphi \sin(2n+1)\theta_0 \, d\varphi .$$

We beschouwen eerst $\mathcal{J}_2$. Wegens $v = \sin \varphi$ hebben we

$$\sin (2n+1)\theta_0 = \sin ((2n+1)\arcsin \lambda v) = (-1)^n T_{2n+1}(\lambda v)$$

en

$$\sin 2\nu\varphi = (-1)^{\nu+1} U_{2\nu}(v) = (-1)^{\nu+1} \sqrt{1-v^2} Q_{2\nu-1}(v)$$

en (22) gaat dus over in

$$(23) \quad \mathcal{J}_2 = \frac{(-1)^{n+\nu+1}}{2n+1} \int_0^1 T_{2n+1}(\lambda v) Q_{2\nu-1}(v) \, dv .$$

De integrand van de laatste integraal is een polynoom in v , en deze integraal kan dus onmiddellijk worden bepaald. Daar $T_{2n+1}(\xi)$ een oneven polynoom is van de graad $2n+1$, is J_2 een oneven polynoom in $\lambda = \frac{y}{x}$ van ten hoogste de graad $2n+1$.

Opm. Formule (23) heeft alleen zin voor $v \geq 1$. Uit (22) blijkt, dat $J_2 = 0$, als $v = 0$.

Tenslotte beschouwen we J_1 . Wegens

$$\begin{aligned} \cos(2n+1)\theta_0 &= \cos((2n+1)\arcsin \lambda v) \\ &= (-1)^n U_{2n+1}(\lambda v) = (-1)^n \sqrt{1-\lambda^2 v^2} Q_{2n}(\lambda v) \end{aligned}$$

en

$$\cos 2v\varphi = \cos(2v \arcsin v) = (-1)^v T_{2v}(v),$$

gaat (21) over in

$$(24) \quad J_1 = \frac{\pi \int_0^1}{4n+2} + \frac{(-1)^{n+v+1}}{2n+1} \int_0^1 Q_{2n}(\lambda v) T_{2v}(v) \sqrt{\frac{1-\lambda^2 v^2}{1-v^2}} dv.$$

Daar $Q_{2n}(\xi)$ en $T_2(\xi)$ even polynomen zijn in ξ (van de graad $2n$ resp. $2v$) wordt door (24) de berekening van J_1 dus herleid tot de berekening van de elliptische integralen

$$(25) \quad S_h = \int_0^1 \frac{v^{2h} dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}} \quad (h = 0, 1, \dots, n+v).$$

De integralen S_h kunnen worden uitgedrukt in de (uitvoerig getabelleerde) „volledige” elliptische integralen

$$K(\lambda) = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}} \quad \text{en} \quad E(\lambda) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\lambda^2 v^2}{1-v^2}} dv$$

($0 < \lambda^2 < 1$). En wel geldt vooreerst

$$(26) \quad S_0 = K(\lambda); \quad S_1 = \frac{1}{\lambda^2} (K(\lambda) - E(\lambda)).$$

Verder bewijst men met partiële integratie gemakkelijk de recursieformule

$$(27) \quad S_h = \frac{2h-2}{2h-1} (1 + \lambda^2) S_{h-1} - \frac{2h-3}{2h-1} S_{h-2},$$

geldig voor $h \geq 2$. Uit (26) en (27) kan men S_h recursief bepalen b.v.

$$S_2 = \frac{2+\lambda^2}{3\lambda^2} K(\lambda) - \frac{2+2\lambda^2}{3\lambda^2} E(\lambda).$$

Conclusie. In het geval $0 \leq y \leq x$ met $0 < x + y \leq 2\pi$ kan de grootheid $B_{2n+1, 2\nu, 1}$ worden berekend uit de formules (13), (15), (23) en (24).

Alvorens het geval $y \geq x$ te behandelen geven we eerst een Toepassing. Zij $\nu = n = 0$. Wegens $Q_0 = 1$ en $T_0 = 1$ volgt Uit (24).

$$J_1 = \frac{\pi}{2} - E(\lambda).$$

Verder hebben we wegens (22) $J_2 = 0$, en dus wegens (15)

$$J = 1 - \frac{2}{\pi} E(\lambda).$$

Uit (13) volgt tenslotte

$$(28) \quad B_{1,0,1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(mx) J_0(my)}{m} = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{4} x,$$

geldig voor $0 \leq y \leq x$ en $0 < x + y \leq 2\pi$. Merk op, dat voor $0 \leq \lambda \leq 1$ de functie $E(\lambda)$ monotoon afneemt en dat $E(0) = \frac{\pi}{2}$, $E(1) = 1$.

Tenslotte beschouwen we het geval $y \geq x$ d.w.z. $\lambda \leq 1$, als

$$(29) \quad \mu = \frac{x}{y}.$$

Zij $\mathcal{R}$ het vierkant $\left[0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ en } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right]$. Dan wordt

$$M_{n,\nu} = \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{R}} \sin((2n+1)\theta - 2\nu\varphi) d\theta d\varphi$$

door (14) gegeven. In plaats van J zullen we berekenen

$$(29) \quad \bar{J} = M_{n,\nu} - J = \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{R} + \mathcal{Q}} \sin((2n+1)\theta - 2\nu\varphi) d\theta d\varphi.$$

En wel is

$$(30) \quad \bar{J} = \frac{2}{\pi} (\bar{J}_1 - \bar{J}_2)$$

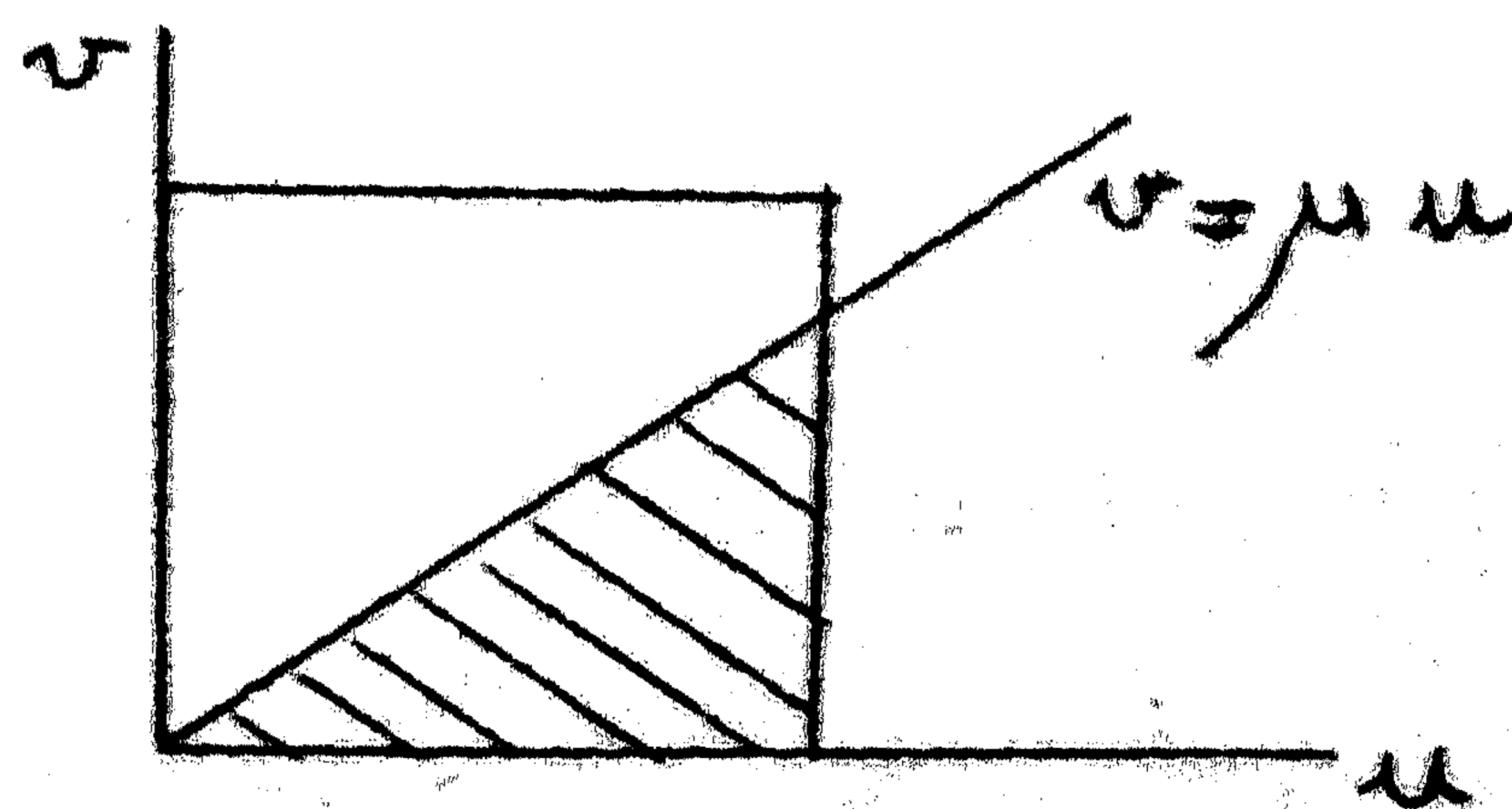
met

$$(31) \quad \bar{J}_1 = \int_{\mathcal{R}-\mathcal{Q}} \sin(2n+1)\theta \cos 2\nu\varphi d\theta d\varphi$$

en

$$(32) \quad \bar{J}_2 = \int_{\mathcal{R}-\mathcal{Q}} \cos(2n+1)\theta \sin 2\nu\varphi d\theta d\varphi.$$

Door de transformatie (19) gaat het gebied $\mathcal{R} - \mathcal{Q}$ over in het volgende, gearceerde gebied in het u - v -vlak



Het ligt dus voor de hand in (31) en (32) eerst de integratie naar φ , en daarna de integratie naar θ uit te voeren. Passen we daarna de transformatie $u = \sin \theta$ toe, dan volgt na enige berekening (analoog met (23) en (24))

$$(33) \quad \bar{J}_1 = \frac{(-1)^{n+\nu}+1}{2\nu} \int_0^1 T_{2n+1}(u) Q_{2\nu-1}(\mu u) \sqrt{\frac{1-\mu^2 u^2}{1-u^2}} du$$

voor $\nu \geq 1$,

$$(33)' \quad \bar{J}_1 = (-1)^n \int_0^1 T_{2n+1}(u) \arcsin(\mu u) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

voor $\nu = 0$;

$$(34) \quad \bar{J}_2 = \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{2\nu} + \frac{(-1)^{n+\nu}+1}{2\nu} \int_0^1 Q_{2n}(u) T_{2n}(\mu u) du,$$

voor $\nu \geq 1$ (voor $\nu = 0$ hebben we $\bar{J}_2 = 0$). Voor de berekening van $\bar{J}_1$ en $\bar{J}_2$ uit (33) en (34) gelden dezelfde opmerkingen als voor de berekening van J_1 en J_2 uit (23) en (24).

Conclusie: In het geval $0 \leq x \leq y$ met $0 < x + y \leq 2\pi$ kan de grootheid $B_{2n+1,2\nu,1}$ worden berekend uit de formules (13), (29) en (14), (30), (33) en (34).

Toepassing: Zij weer $\nu = n = 0$. Dan is $\bar{J}_2 = 0$ en wordt $\bar{J}_1$, wegens (33)' en $T_1(\xi) = \xi$, gegeven door

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= \int_0^1 \arcsin(\mu u) \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= - \int_0^1 \arcsin(\mu u) d\sqrt{1-u^2} \\ &= \mu \int_0^1 \sqrt{\frac{1-u^2}{1-\mu^2 u^2}} du \end{aligned}$$

ofwel

$$\bar{J}_1 = E(\mu) - (1-\mu^2) K(\mu).$$

Uit (30) volgt nu

$$\bar{J} = \frac{2}{\pi} [E(\mu) - (1-\mu^2) K(\mu)]$$

en dus met (29) en (14)

$$J = M_{00} \cdot \bar{J} = 1 - \frac{2}{\pi} [E(\mu) - (1-\mu^2) K(\mu)].$$

Met (13) vinden we tenslotte wegens $\mu = \frac{x}{y}$

$$(35) \quad B_{1,0,1} = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) K\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{4} x;$$

geldig voor $0 \leq x \leq y$ en $0 < x + y \leq 2\pi$.